Početní část 2 - 28.6.2021

3. Zadaná množina je uzavřená koule, tedy zřejmě kompaktní. Kandidáti na extrém v jejím vnitřku jsou stacionární body funkce f, čili právě ty body, kde $\nabla f = (2x, 0, 2z^2) = (0,0,0)$, tedy všechny body na ose y ležící uvnitř koule, tj. body tvaru $[0, y, 0], y \in (-3, 3)$.

   Na okraji množiny M, tedy na sféře dané vazbou $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ najdeme kandidáty metodou Lagr. multiplikátorů. Zavedeme nejprve Lagrangeovu funkci
$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + \frac{2}{3}z^3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$$
   a položíme všechny její parciální derivace rovné nule:
$$\partial_x L = 2x + 2\lambda x = 0 \tag{1}$$
$$\partial_y L = 2\lambda y = 0 \tag{2}$$
$$\partial_z L = 2z^2 + 2\lambda z = 0 \tag{3}$$
$$\partial_\lambda L = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \tag{4}$$

   Výrazy v prvních třech rovnicích lze rozložit na součiny, každá vede na dvě možnosti:
$$(1) \iff 2x(\lambda + 1) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$
$$(2) \iff 2\lambda y = 0 \implies \begin{cases} y = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$
$$(3) \iff 2z(z + \lambda) = 0 \implies \begin{cases} z = 0 \\ \lambda = -z \end{cases}$$

   Z nich poté plynou kombinace možností, které musíme všechny probrat. Konkrétně:

   (a) $x = 0, y = 0, z = 0$ je bod, který neleží na okraji M.

   (b) $x = 0, y = 0, \lambda = -z$: dosadíme $x = 0, y = 0$ do vazby a dostáváme dva kandidáty $[0, 0, 3], [0, 0, -3]$.

   (c) $x = 0, \lambda = 0, z = 0$: dosadíme $x = 0, z = 0$ do vazby a dostáváme dva kandidáty $[0, 3, 0], [0, -3, 0]$.

(d) $x = 0, \lambda = 0, \lambda = -z$: vede na totéž, co (c)

(e) $\lambda = -1, y = 0, z = 0$: dosadíme $y = 0, z = 0$ do vazby a dostáváme dva kandidáty $[3, 0, 0], [-3, 0, 0]$.

(f) $\lambda = -1, y = 0, z = -\lambda$: proto $z = 1$ a dosazením do vazby dostáváme dva kandidáty $[\sqrt{8}, 0, 1], [-\sqrt{8}, 0, 1]$

Další možnosti už nepřipadají v úvahu (obsahují podmínky $\lambda = -1 \wedge \lambda = 0$). Nakonec dosadíme všechny nalezené kandidáty do funkce f a dostáváme:

$$\begin{aligned} f(0, y, 0) &= 0 \text{ pro } y \in (-3, 3) \\ f(0, 3, 0) = f(0, -3, 0) &= 0 \\ f(0, 0, 3) &= \boxed{18} \text{ MAX} \\ f(0, 0, -3) &= \boxed{-18} \text{ MIN} \\ f(3, 0, 0) = f(-3, 0, 0) &= 9 \\ f(\sqrt{8}, 0, 1) = f(-\sqrt{8}, 0, 1) &= 8 + 2/3. \end{aligned}$$

4. (a) Na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ je f podílem spojitých funkcí, přičemž jmenovatel je nenulový, a tedy je zde spojitá. Pomocí polárních souřadnic spočítáme pro $0 < r < 1$

$$|f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) - f(0,0)| = \left|\frac{r^5\cos^5\alpha + r^4\sin^4\alpha}{r^2}\right| \leq r^2.$$

Protože $r^2 \to 0$ pro $r \to 0+$ platí $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ a tedy f je spojitá i v bodě $(0,0)$.

(b) Platí $f(x,0) = x^3$ a $(x^3)' = 3x^2$, proto $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 3 \cdot 0^2 = 0$. Podobně $f(0,y) = y^2$ a $(y^2)' = 2y$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(c) Pokud $df(0,0)$ existuje platí $df(0,0)(x,y) = 0$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, podle předchozího kroku. Pro existenci $df(0,0)$ tedy potřebujeme ověřit platnost limity

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Pro $(x,y) \neq (0,0)$ položíme

$$g(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^5+y^4}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Potom opět v polárních souřasnicích a pro $0 < r < 1$

$$|g(r\cos\alpha, r\sin\alpha) - 0| = \left|\frac{r^5\cos^5\alpha + r^4\sin^4\alpha}{r^3}\right| \leq r.$$

a protože $r \to 0$ pro $r \to 0+$ platí, že $df(0,0)$ existuje a je roven 0.